Superpozicija talasa. Fazna i grupna brzina

Kod rešavanja Maksvelovih jednačina, posmatrali smo ravan, harmonijski monohromatski elektromagnetni talas. Talas je opisan jednom frekvencijom ω i jednim talasnim brojem *k*. U stvarnim okolnostima, takav idealizovan talas ne postoji. **Čak i u najmonohromatskojem izvoru svetlosti ili u najuže podešenom radio prijemniku ili emiteru, imamo interval frekvencije ili talasne dužine koji su konačne (iako jako male) širine.** To širenje može poticati od konačnog trajanja pulsa ili od nekog širenja u samom emiteru (prirodna širina linije, uslovljena prirodnom širinom energetskog nivoa posmatranog atoma). Pošto su Maksvelove jednačine linearne po E i B, sledi da će i linearna kombinacija rešenja sa različitim frekvencijama, takođe biti rešenje talasne jednačine. U obzir treba uzeti neke nove momente:

1. **Ako je sredina u kojoj se posmatra prostiranje talas disperzivna (tj. dielektrična konstanta je funkcija frekvencije polja $\varepsilon_r = f(\omega)\ ili\ n = f(k)$), fazna brzina neće biti ista za sve komponente sa različitim frekvencijama. Kao posledica toga, različite komponente talasa će putovati različitim brzinama i pojaviće se fazna razlika između njih. To će dovesti do promene oblika poslatog pulsa, na primer, ako on prelazi veliko rastojanje (signal koji putuje optičkim vlaknom preko okeana).**
2. **U disperzionoj sredini brzina kojom se prenosi energija se može značajno razlikovati od fazne brzine, ili čak može izgubiti jasno značenje.**
3. U disipativnoj sredini, puls zračenja će biti oslabljen prilikom prostiranja, sa ili bez izobličenja, u zavisnosti da li je efekat disipacije zavisan od frekvencije.

Posmatrajmo skalarni talas u jednoj dimenziji. Skalarna amplituda $E\,(x,t)$ može se posmatrati kao jedna od komponenti elektromagnetnog polja. Najopštije rešenje talasne jednačine može se predstaviti u formi:

$$E(x,t) = E_1 e^{i(kx-\omega t)} + E_1 e^{-i(kx-\omega t)}, \tag{1}$$

gde je veza između frekvencije ω i talasnog broja k data preko relacije:

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\,\frac{\omega}{c}. \tag{2}$$

Obe od veličina ω ili *k*, mogu biti posmatrane kao nezavisne kada se pravi linearna superpozicija. Može se pokazati da je povoljnije **uzeti talasni broj *k* kao nezavisnu veličinu**. Da bi se opisala pojava disperzije talasa, posmatrajmo ω kao opštu funkciju od *k*:

$$\omega = \omega(k). \tag{3}$$

Za većinu talasnih dužina ω je glatka funkcija od *k*, ali na pojedinim frekvencijama postoji oblast „anomalne disperzije“ gde se ω značajno menja u malom intervalu talasnih dužina. Sa opštim oblikom zavisnosti (3) diskusija u nastavku se može primeniti jednako dobro na elektromagnetne talase, zvučne talase itd. Za ovo razmatranje pretpostavimo da su k i $\omega(k)$ realne veličine, tako da su efekti disipacije isključeni.

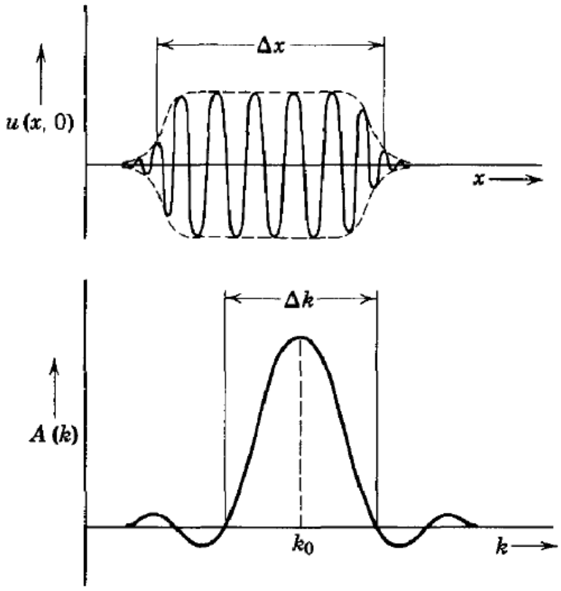
Na osnovu opšteg rešenja datog relacijom (1), možemo uvesti generalizovano rešenje u obliku:

$$E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk. \tag{4}$$

Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ je uveden da bi se uskladio izraz sa oblikom Furijeovog integrala. Amplituda $E(k)$ opisuje osobine linearne superpozicije različitih talasa. Ona je data kao **Furijeova transformacija prostorne amplitude**, izračunata u vremenskom trenutku $t = 0$:

$$E(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x,0) e^{ikx} dx. \tag{5}$$

Ako $E(x,0)$ predstavlja harmonijski talas $e^{ik_0 x}$ za sve vrednosti x, može se pokazati da je $E(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k - k_0)$, odgovara monohromatskom putujućem talasu $E(x,0) = e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t}$, kao što je i traženo.



Slika 1. Harmonijski talasni voz konačne dužine i njegov Furije spektar po talasnim brojevima.

Ako, međutim, u trenutku $t = 0$, $E(x,0)$ predstavlja konačan talasni paket, sa dužinom reda Δx, kao što je pokazano na slici 1, onda amplituda $E(k)$ nije delta funkcija. Nasuprot njoj, ona ima **pik širine reda $\Delta \boldsymbol{k}$,** koji je centriran oko talasnog broja k_0, koji je dominantan talasni broj u modulisanom talasu $E(x,0)$. Ako su Δx i Δk definisane kao rms odstupanja od srednjih vrednosti x i k (definisane u smislu intenziteta $|E(x,0)|^2$ i $|E(k)|^2$), moguće je izvesti generalni zaključak:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Može se pokazati da, za većinu realnih pulseva ili talasnih paketa koji se ne prekidaju isuviše naglo, Δx puta Δk se nalazi blizu niže vrednosti u nejednakosti (6). To znači da kratki talasni paketi sa samo nekoliko prisutnih talasnih dužina ima veoma široku raspodelu talasnih brojeva monohromatskih talasa, i obrnuto da je dugi sinusni talasni paket skoro monohromatičan. Relacija (6) važi podjednako dobro i za raspodele u vremenu i frekvenciji:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Sledeće pitanje je ponašanje pulsa ili konačnog talasnog paketa u vremenu. Puls prikazan u t=0 na na slici 1, počinje da se kreće kako vreme protiče. **Njegove komponente sa različitim frekvencijama i talasnim brojevima se kreću sa različitim faznim brzinama.** Kao posledica toga postoji tendencija da se naruši originalna koherencija i da puls postane izobličen. U najmanju ruku, možemo očekivati da se on kreće različitom brzinom od, recimo, usrednjene fazne brzine komponenti od kojih je sastavljen. Slučaj jako disperzivne sredine ili veoma oštrog pulsa sa velikom širinom prisutnih talasnih brojeva, je težak za opisivanje. Ali prostiranje pulsa koji nije isuviše širok u njegovom spektru talasnih brojeva, ili pulsa u sredini u kojoj frekvencija slabo zavisi od talasnog broja, može biti aproksimativno opisan na sledeći nači. Talas je u nekom trenutku *t* opisan relacijom (4). Ako je raspodela $E(k)$ prilično oštro centrirana oko neke vrednosti k_0, onda se zavisnost frekvencije $\omega(k)$ može razviti u red oko te vrednosti k:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 (k - k_0) + \cdots \tag{8}$$

Ako sada tu zavisnost ubacimo u integral u (4), dobićemo:

$$E(x,t) \cong \frac{e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0 - \omega_0)]t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k) e^{i[x-(d\omega/dk)|_0 t]k} dk. \tag{9}$$

Na osnovu relacije (5) i njene inverzne, očigledno je da je integral u (9) upravo $E(x',0)$, gde je $x' = x - (d\omega/dk)|_0 t$:

$$E(x,t) \cong E\left(x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0, 0\right) e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0 - \omega_0)]t}. \tag{10}$$

Ova relacija pokazuje da se, nezavisno od ukupnog faznog faktora, impuls prostire skupa neizmenjenog oblika brzinom koja se označava kao *grupna brzina*:

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0. \tag{11}$$

Ako je gustina energije talasa povezana sa amplitudom talasa (ili kvadratom njene apsolutne vrednosti), jasno je da se u ovoj aproksimaciji transport energije vrši grupnom brzinom, pošto je to brzina kojom se puls prostire.

Za svetlosne talase je veza između ω i k data relacijom:

$$\omega(k) = \frac{c \cdot k}{n(k)}, \tag{12}$$

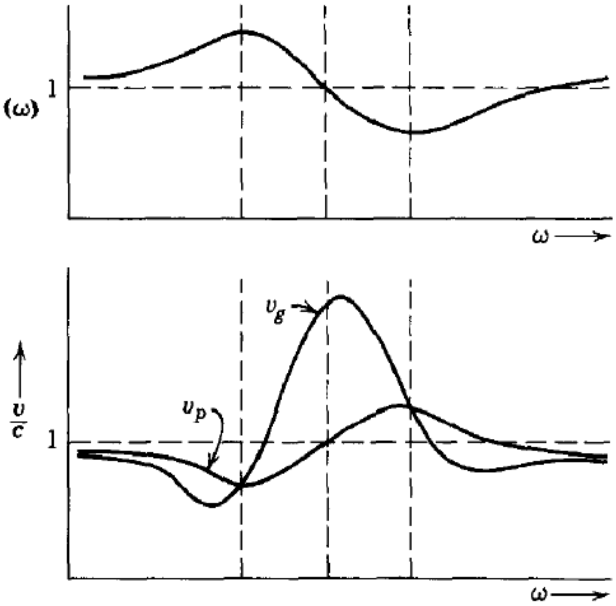
gde je *c* brzina svetlosti u vakuumu i *n(k)* indeks prelamanja izražen kao funkcija talasnog broja *k* (slika 2). Fazna brzina je data kao:

$$v_p = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)}, \tag{13}$$

i manja je od brzine svetlosti. Grupna brzina je sada:

$$v_g = \frac{c}{[n(\omega)+\omega(dn/d\omega)]}. \tag{14}$$

U ovoj jednačini je pogodnije posmatrati n kao funkciju od ω nego od k (slika2). U slučaju normalne disperzije važi da je $(dn/d\omega) > 0$ i $n(\omega) \geq 1$ te **je brzina toka energije manja od fazne brzine i brzine svetlosti c.** U oblasti anomalne disperzije, sa druge strane, $(dn/d\omega)$ može postati veliko i negativno. **Tada se grupna brzina značajno razlikuje od fazne brzine, čak može postati veća i od c (na osnovu relacije 14)!** Ovde se ne radi o narušavanju ideje specijalne teorije relativnosti, već o tome da grupna brzina gubi smisleno značenje. Velika vrednost $(dn/d\omega)$ znači da se ω kao funkcija od k brzo i značajno menja, to znači da aproksimativan izraz (8) više ne važi, to jest potrebno je uzeti i naredne članove u razvoju ω po k.



Slika 2. Indeks prelamanja $n(\omega)$ kao funkcija frekvencije talasa ω u regionu anomalne disperzije (gore). Fazna v_p i grupna brzina v_g u funkciji frekvencije ω (dole).

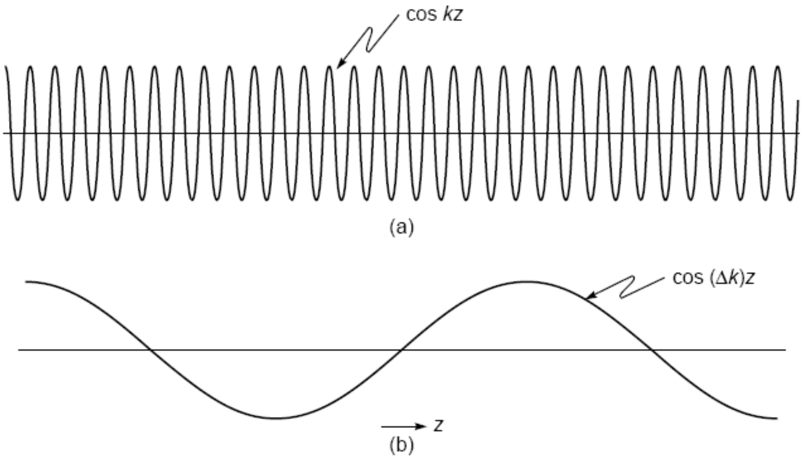
Imajući u vidu da svi izvori elektromagnetnog zračenja emituju zračenje u određenom intervalu talasnih dužina $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$ (odnosno u određenom intervalu talasnih brojeva $k, k + \Delta k$), prostiranje zračenja se može posmatrati kao prostiranje određenog talasnog paketa. Kao najednostavniji slučaj razmotrimo talasni paket čije se dve komponente električnog polja veoma malo razlikuju po talasnom broju (odnosno frekvenciji):

$$E_1(x,t) = E_0 cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta \mathrm{k})z]$$
$$E_2(x,t) = E_0 cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta \mathrm{k})z] \tag{14a}$$

pri čemu važi da je $\Delta\omega \ll \omega$ i $\Delta k \ll k$. Da bi odredili oblik rezultujućeg električnog polja talasa, saberimo $E_1(x,t)$ i $E_2(x,t)$, uz primenu odgovarajućeg trigonometrijskog identiteta za zbir kosinusa uglova:

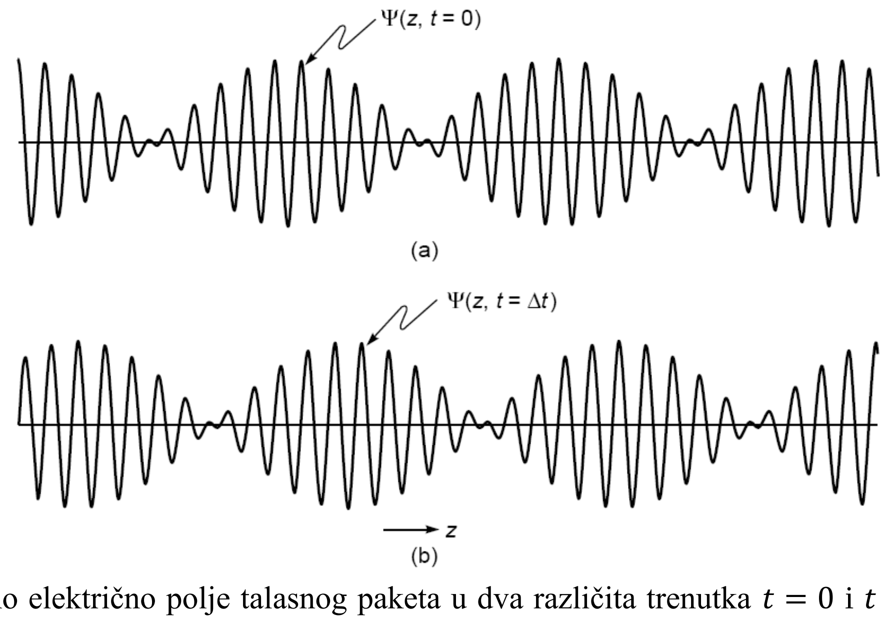
$E_u(x,t) = 2E_0 cos[(\Delta\omega)t - (\Delta \mathrm{k})z] * cos[\omega t - kz]$	(14b)

Na osnovu prethodnog izraza se vidi da ukupno polje talasa ima dve komponente, jednu brzo promenljivu u prostoru i vremenu (sa talasnim brojem k i frekvencijom ω) – oscilatorni član i drugo sa sporim promenama (($\Delta\omega$) i(Δk)) - envelopu, kao što je predstavljeno na slici 3.



Slika 3. Varijacija: a) brzo promenljivog člana $\cos(\omega t - kx)$; b) sporo promenljivog člana (envelope) $\cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x]$ u izrazu za superpoziciju dva bliska EMG talasa, posmatrana u trenutku $t = 0$. Rastojanje između dva susedna pika je u prvom slučaju $2\pi/k$ a u drugom $2\pi/(\Delta k)$.

Ako se posmatra prostiranje ukupnog polja, vidimo da se pozicija maksimuma premešta sporije od bilo koje fazne tačke pojedinačnih talasa, brzinom koja se definiše kao grupna brzina i koja predstavlja brzinu prenosa informacije datim talasom.



Slika 4. Ukupno električno polje talasnog paketa u dva različita trenutka $t = 0$ i $t = \Delta t$. Envelopa se kreće grupnom brzinom $\Delta\omega/\Delta k$, što je i brzina prenosa informacije kroz datu sredinu.

Na osnovu izraza (11) kojim je definisana grupna brznina v_g , i veze talasnog broja k i kružne frekvencije ω sa talasnom dužinom λ, pored relacije (14) moguće je izvesti relacije kojima se jasnije određuje kretanje talasnog paketa u zavisnosti od indekas prelamanja sredine. Ako pođemo od (11) i uzmemo u obzir da je $\omega = k \cdot v_f$, onda sledi:

$$v_g = \frac{d(k \cdot v_f)}{dk} = v_f + \frac{dv_f}{dk} \cdot k \tag{15}$$

U vakuumu i vazduhu je $v_f = c = const.$ i ne zavisi od talasne dužine svetlosti, tako da je $v_g = v_f = c$. U ostalim dielektricima je $v_f = c/n$, gde je indeks prelamanja funkcija talasne dužine $n(\lambda)$ ili talasnog broja $n(k)$ i grupna brzina nije jednaka faznoj (manja je ili veća od nje!). Uzimajući u obzir da je:

$$\frac{dv_f}{dk} = \frac{d}{dk}\frac{c}{n(k)} = -\frac{c}{n^2}\frac{dn}{dk}$$

izraz (15) za grupnu brzinu se transformiše u:

$$v_g = \frac{d(k \cdot v_f)}{dk} = v_f + \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{dk} = v_f\left[1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right] \tag{16}$$

Ako se uzme u obzir veza između talasnog broja i talasne dužine $k = 2\pi/\lambda$ onda se u prethodnoj relaciji može preći od izvoda po talasnom broju na izvod po talasnoj dužini:

$\frac{dn}{dk} = \frac{dn}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2}\frac{dn}{d\lambda} == -\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{dn}{d\lambda}$	$\Rightarrow$	$\frac{k}{n}\frac{dn}{dk} = -\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}$

sada relacija (15) dobija oblik:

$$v_g = v_f\left[1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right] \tag{17}$$

Na osnovu prethodnog izraza se vidi da će odnos fazne i grupne brzine svetlosti u datoj sredini biti određen funkcionalnom zavisnošću indekas prelamanja od talasne dužine, to jest prvim izvodom te funkcije (da li je prvi izvod pozitivan ili negativan, to jest da li je zavisnost rastuća ili opadajuća).

Za jasniju sliku o prostiranju talasnog paketa, može se poći od recipročne vrednosti grupne brzine:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} \quad \Leftrightarrow k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d(k)}{d\omega} = \frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn(\omega)}{d\omega}$$

Ako se u poslednjem izrazu pređe od izvoda indeksa prelamanja po frekvenciji na izvod po talasnoj dužini, imajući u vidu vezu $\lambda = 2\pi c/\omega$, dobija se:

$\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2}\frac{dn}{d\lambda} == -\frac{\lambda}{\omega}\frac{dn}{d\lambda}$	$\Rightarrow$	$\frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega} = -\frac{\lambda}{c}\frac{dn}{d\lambda}$

odakle dobijamo sledeći izraz:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n(\omega)}{c} - \frac{\lambda}{c}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{1}{c}\left[n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right] \tag{18}$$

što za grupnu brzinu daje sledeći izraz:

$$v_g = \frac{c}{\left[n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right]} \quad \Rightarrow \quad N_g = \left[n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right] \tag{19}$$

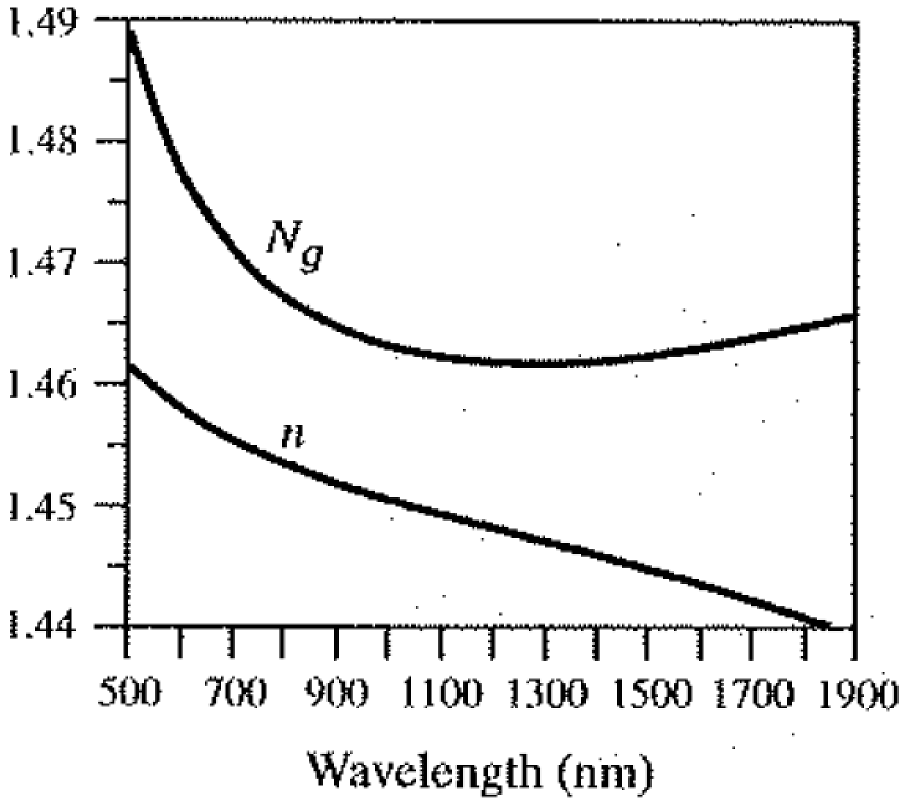
Na ovaj način je uveden grupni indeks prelamanja za talasni paket. U slučaju čistog SiO_2 (silika) zavisnost indeksa prelamanja od talasne dužine (slika 5) se u intervalu $0.5\mu m < \lambda_0 < 1.6\mu m$ može izraziti aproksimativnom empirijskom formulom:

$$n(\lambda_0) = C_0 - a\lambda_0^2 + \frac{a}{\lambda_0^3} \tag{20}$$

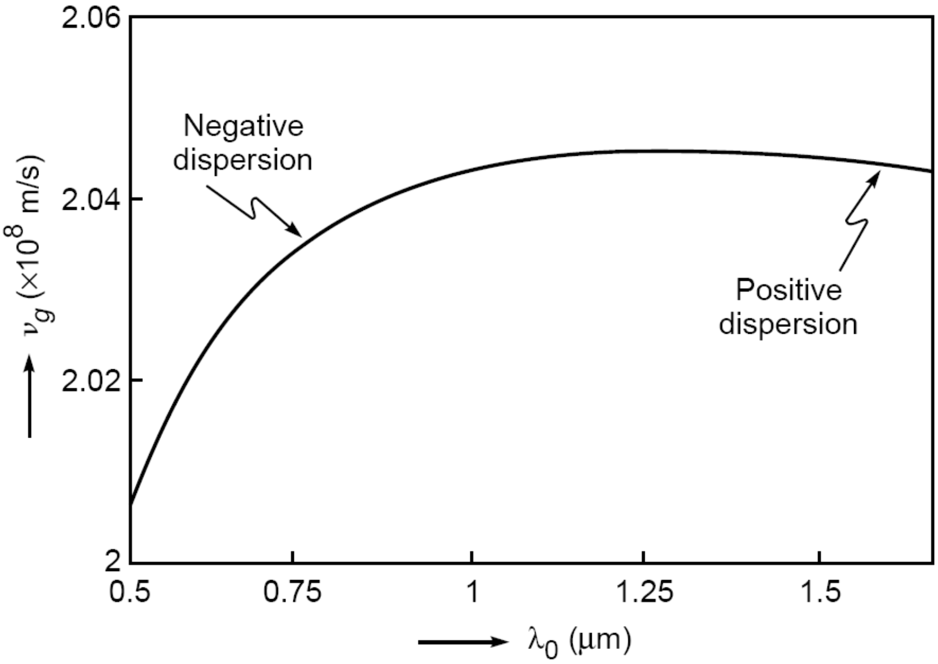
u kojoj je $C_0 = 1.451, a = 0.003$ a λ_0 je izraženo u μm. Na osnovu ove zavisnosti za grupni indeks prelamanja (19) dobijamo:

$$N_g(\lambda_0) = C_0 + a\lambda_0^2 + \frac{3a}{\lambda_0^2} \tag{21}$$

Odgovarajući grupni indeks prelamanja je prikazan na slici 5, a zavisnost grupne brzine od talasne dužine na slici 6.



Slika 5. Zavisnost indeksa prelamanja i grupnog indeksa prelamanja za SiO_2 (silika).



Slika 6. Zavisnost grupne brzine od talasne dužine za SiO_2 (silika).

Na osnovu izraza (19) očigledno je da će svetlost različitih talasnih dužina u talasnom paketu putovati različitim brzinama kroz dielektrik. Ako se posmatra prenos informacija kroz optičko vlakno, u obliku pojedinačnih impulsa vremenske širine τ_0, usled različitih brzina kretanja pojedinih komponenti impulsa doći će do njegovog vremenskog širenja. Da bi odredili to vremensko širenje, posmatrajmo impuls koji se prostire kroz optičko vlakno dužine L, načinjeno od silicijum-dioksida (SiO_2). Vreme njegovog prostiranja određujemo na osnovu:

$$\tau = \frac{L}{v_g} = \frac{L}{c}\left[n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}\right] \tag{22}$$

Pošto desna strana jednakosti zavisi od λ_0 ovo vreme će biti različito i doći će do određenog širenja impulsa, koje se na osnovu funkcionalne zavisnosti $\tau = f(\lambda_0)$ određuje kao:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_m &= \tau(\lambda_0 + \Delta\lambda_0) - \tau(\lambda_0) \\ &= \frac{d\tau}{d\lambda_0}\Delta\lambda_0 \\ &= -\frac{L\Delta\lambda_0}{\lambda_0 c}\left[\lambda_0^2 \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}\right] \end{aligned} \tag{23}$$

Veličina $\Delta\tau_m$ se uobičajno definiše kao materijalna disperzija jer je uslovljena materijalnim osobinama sredine kroz koju se prostire signal. Na osnovu ovoga sledi da će signal vremenske širine τ_0 posle prostiranja vlakno dužine L biti proširen na trajanje:

$$\tau_f^2 \approx \tau_f^2 + (\Delta\tau_m)^2 \tag{24}$$

Primer 1: U optičkim komunikacionim sistemima prve generacije korišćene su LED diode sa talasnom dužinom $\lambda_0 = 0.85\ \mu m$ sa spektralnom širinom $\Delta\lambda_0 = 25\ nm$. Na osnovu izraza (21) za SiO_2 sledi da će disperziono širenje biti $\Delta\tau_m \approx 2.1\ ns/km$, to jest signal će se prošiti za $2.1\ ns$ kada prođe 1 km puta kroz silikonsko optičko vlakno.

Primer 2: U optičkim komunikacionim sistemima četvrte generacije koriste se LD (laserske) diode sa talasnom dužinom $\lambda_0 = 1.55\ \mu m$ sa spektralnom širinom $\Delta\lambda_0 = 2\ nm$. Na osnovu izraza (21) za SiO_2 sledi da će disperziono širenje biti $\Delta\tau_m \approx 43\ ps/km$, to jest signal će se prošiti za 43 ps kada prođe 1 km puta kroz silikonsko optičko vlakno.